Kapitola 3

POLYNOMY A RACIONÁLNÍ LOMENÉ FUNKCE

V této kapitole se budeme podrobněji zabývat dalšími dvěma důležitými případy elementárních funkcí: polynomy a racionálními lomenými funkcemi. Lineární a kvadratické funkce, které jsme si připomněli v předchozí kapitole, jsou nejjednoduššími příklady polynomů. Nejjednodušším příkladem racionální lomené funkce je funkce nepřímé úměry.

3.1 Polynomy

Polynom

Definice 3.1.: Polynomem nazýváme funkci $y = P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, kde $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbf{R}$ jsou koeficienty polynomu a $n \geq 0$ je celé číslo.
Je-li $a_0 \neq 0$, číslo *n* se nazývá stupeň polynomu a píšeme pak $P_n(x)$.

Definičním oborem polynomu je množina všech reálných čísel.
Pokud jsou všechny mocniny proměnné *x* sudé, je polynom sudou funkcí.
Pokud jsou všechny mocniny proměnné *x* liché a koeficient $a_n = 0$, je polynom lichou funkcí.

Příklady polynomů

Polynomy stupně 0 jsou konstantní funkce: např. $P_0(x) = 3$

Polynomy stupně 1 nazýváme lineární polynomy: např. $P_1(x) = 2x + 4$

Polynomy stupně 2 nazýváme kvadratické polynomy: např. $P_2(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Polynomy stupně 3 nazýváme kubické polynomy: např. $P_3(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 7$

Rovnost polynomů

Věta 3.2.: Dva polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ jsou si rovny, právě když se rovnají koeficienty u stejných mocnin proměnné *x*.

Na střední škole jste prováděli součet, rozdíl, součin a podíl polynomů (mluvili jste o operacích s mnohočleny). V následující úloze si tyto operace připomeneme.

Operace s polynomy

Jsou dány polynomy $P(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 1$ a $Q(x) = x^2 + 3x - 4$.

Vypočítejme: a) součet polynomů $P(x) + Q(x)$,

b) rozdíl polynomů $P(x) - Q(x)$,

c) součin polynomů $P(x) \cdot Q(x)$.

Polynomy můžeme mezi sebou sečítat, odčítat, násobit a dělit podle pravidel platných pro počítání s reálnými čísly, a vět o mocninách: $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $a^r : a^s = a^{r-s}$, $\left(a^r\right)^s = a^{r.s}$, kde $a \in \mathbf{R}^+, r \in \mathbf{R}, s \in \mathbf{R}$.

a) $P(x)+Q(x)=(x^4-2x^3+4x^2-6x+1)+(x^2+3x-4)=x^4-2x^3+5x^2-3x-3$,

b) $P(x)-Q(x)=(x^4-2x^3+4x^2-6x+1)-(x^2+3x-4)==x^4-2x^3+3x^2-9x+5$,

c) $P(x)\cdot Q(x)=(x^4-2x^3+4x^2-6x+1).(x^2+3x-4)=x^6-2x^5+4x^4-6x^3+x^2+3x^5-$
$-6x^4+12x^3-18x^2+3x-4x^4+8x^3-16x^2+24x-4=x^6+x^5-6x^4+14x^3-33x^2+27x-4$

Dělení polynomů

Věta 3.3.: K libovolným polynomům $P(x)$ a $Q(x)$, kde $Q(x)\neq 0$, existují polynomy $R(x)$ a $T(x)$ tak, že platí $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=R(x)+\dfrac{T(x)}{Q(x)}$, kde stupeň polynomu $T(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$.

Polynom $T(x)$ se nazývá zbytek po dělení polynomu $P(x)$ polynomem $Q(x)$. V případě, že $T(x)=0$, jde o dělení beze zbytku.

Dělení polynomů odpovídá dělení celých čísel: např. $\dfrac{13}{5}=2+\dfrac{3}{5}$.

Příklad 3.1.

Jsou dány polynomy $P(x)=6x^3+13x^2+4x-7$ a $Q(x)=2x-1$. Vypočítejte jejich podíl $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Řešení: Při dělení musí být oba polynomy uspořádány sestupně podle klesajících mocnin proměnné. Postup dělení bude popsán ve třech krocích.

1) První člen dělence dělíme prvním členem dělitele (tj. $6x^3:2x=3x^2$). Získaným podílem ($3x^2$) násobíme všechny členy dělitele $(2x-1)$ (tj. $(2x-1)\cdot 3x^2=6x^3-3x^2$). Tento dílčí výsledek odečteme od dělence.

Zapíšeme : $(6x^3+13x^2+4x-7):(2x-1)=3x^2$

$$\begin{array}{l} \underline{-(6x^3-3x^2)} \\ \quad 16x^2+4x-7 \end{array}$$

2) Postup opakujeme, a to tak, že prvním členem dělitele dělíme první člen zbytku $(16x^2:2x=8x)$. Získaným podílem $(8x)$ opět násobíme dělitele $((2x-1).8x=16x^2-8x)$ a tento další dílčí výsledek odečteme od zbytku

Zapíšeme: $(6x^3+13x^2+4x-7):(2x-1)=3x^2+8x$

$$\begin{array}{l} \underline{-(6x^3-3x^2)} \\ \quad 16x^2+4x-7 \\ \quad \underline{-(16x^2-8x)} \\ \qquad 12x-7 \end{array}$$

3) Tento postup opakujeme, dokud není zbytek po dělení nižšího stupně než je dělitel.

Zapíšeme: $(6x^3+13x^2+4x-7):(2x-1)=3x^2+8x+6-\dfrac{1}{2x-1}$

$$\begin{array}{l} \underline{-(6x^3-3x^2)} \\ \quad 16x^2+4x-7 \\ \quad \underline{-(16x^2-8x)} \\ \qquad 12x-7 \\ \qquad \underline{-(12x-6)} \\ \qquad\quad -1 \end{array}$$

Dělení má smysl za podmínky, že dělitel je různý od nuly, tj. $x \neq \frac{1}{2}$.
O správnosti dělení se můžeme přesvědčit zkouškou. Součin podílu a dělitele se musí rovnat dělenci.

Kořen polynomu

Definice 3.4.: Číslo *c* (reálné nebo komplexní) nazýváme kořenem polynomu *P*(*x*), jestliže $P(c) = 0$. Výraz $(x - c)$ pak nazýváme kořenovým činitelem.

Vlastnosti polynomů

- Polynom stupně *n* má právě *n* kořenů (reálných nebo komplexních).
- Je-li číslo *c* kořenem polynomu $P_n(x)$, můžeme tento polynom napsat ve tvaru součinu $P_n(x) = (x - c).Q_{n-1}(x)$, kde $Q_{n-1}(x)$ je vhodný polynom stupně $(n-1)$ (polynom $Q_{n-1}(x)$ budeme v dalším textu nazývat „zbytkový" polynom).
- Má-li polynom $P_n(x)$ kořeny $x_1, x_2, ..., x_n$, lze jej rozložit na součin kořenových činitelů $P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$.

Jsou-li v rozkladu polynomu některé kořeny stejné, mluvíme o vícenásobných kořenech. Vyskytuje-li se kořen v rozkladu pouze jednou, jde o jednoduchý kořen.
Při rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů v reálném oboru (nepočítáme s komplexními kořeny) se v součinu vyskytují tyto typy činitelů:
$(x - x_i)$ – jde-li o jednoduchý kořen x_i,
$(x - x_j)^k$ – jde-li o *k*-násobný kořen x_j,
$(ax^2 + bx + c)$ – jde-li o polynom 2. stupně, který má komplexní kořeny ($D = b^2 - 4ac < 0$).

Hornerovo schéma

Při počítání s polynomy je velmi užitečné tzv. Hornerovo schéma. Jde o algoritmus, pomocí kterého je možné počítat hodnotu polynomu v daném bodě, dělit polynom lineárním polynomem $(x - x_0)$, a který se používá při rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů.

Je-li zadaný polynom $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ a číslo x_0, má Hornerovo schéma tvar tabulky

	a_0	a_1	...	a_n
x_0	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + x_0b_0$	...	$b_n = a_n + x_0b_{n-1} = P_n(x_0)$

,

kde na prvním řádku jsou koeficienty polynomu a čísla na druhém řádku se počítají pomocí rovnic: $b_0 = a_0$, $b_i = a_i + x_0b_{i-1}$, pro $i = 2,3,...,n$.
Funkční hodnota $P_n(x_0)$ je pak rovna číslu b_n.

Příklad 3.2.

Určete hodnotu polynomu $P_4(x) = x^4 - 7x^2 + 6$ v bodě $x_0 = 2$ a zjistěte, zda číslo $x_1 = 1$ je kořenem tohoto polynomu, případně kolikanásobným.

Řešení: K výpočtu využijeme Hornerovo schéma.

	$a_0 = 1$	$a_1 = 0$	$a_2 = -7$	$a_3 = 0$	$a_4 = 6$
$x_0 = 2$	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + x_0 b_0$	$b_2 = a_2 + x_0 b_1$	$b_3 = a_3 + x_0 b_2$	$b_4 = a_4 + x_0 b_3$
	$= 1$	$= 0 + 2.1$	$= -7 + 2.2$	$= 0 + 2.(-3)$	$= 6 + 2.(-6)$
		$= 2$	$= -3$	$= -6$	$= -6 = P_4(2)$

Hodnota daného polynomu v bodě $x_0 = 2$ je $P_4(2) = -6$.

Nyní vypočítáme hodnotu daného polynomu v bodě $x_1 = 1$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -7 & 0 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -6 & -6 & 0 \end{array}$$

Vzhledem k tomu, že $P_4(1) = 0$, je číslo $x_1 = 1$ kořenem tohoto polynomu.

Po vydělení zadaného polynomu polynomem $(x-1)$, což je kořenový činitel odpovídající kořenu $x_1 = 1$, dostaneme :

$$x^4 - 7x^2 + 6 = (x-1)\cdot(x^3 + x^2 - 6x - 6).$$

Polynom $x^3 + x^2 - 6x - 6$ je vlastně „zbytkový" polynom, popsaný dříve (všimněte si, že jeho koeficienty tvoří druhý řádek počítaného Hornerova schématu). Je třeba dále zjistit, zda číslo $x_1 = 1$ není vícenásobným kořenem, tj. prověříme, jestli číslo 1 je kořenem polynomu $Q_3(x) = x^3 + x^2 - 6x - 6$. Můžeme využít znovu Hornerovo schéma:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & -6 & -6 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -4 & -10 \end{array}.$$

Vzhledem k tomu, že $Q_3(1) = -10 \neq 0$, je číslo $x_1 = 1$ pouze jednoduchým kořenem zadaného polynomu.

Postup při rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů

Hornerovo schéma využíváme také k rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů. Využíváme přitom vlastnost polynomů, podle které mohou být celočíselnými kořeny polynomu $P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, který má koeficient a_0 roven jedné, pouze dělitelé absolutního členu a_n. Budeme počítat Hornerovo schéma pro tyto dělitele dokud nenarazíme na kořen. Koeficienty na tomto řádku Hornerova schématu nám současně vyjadřují „zbytkový" polynom $Q_{n-1}(x)$ (viz vlastnosti polynomů) z rovnosti $P_n(x) = (x-c).Q_{n-1}(x)$. Protože nalezený kořen *c* může být vícenásobný, je třeba postup zopakovat pro polynom $Q_{n-1}(x)$ a pak i další „zbytkové" polynomy nižších řádů, dokud je číslo *c* jejich kořenem. V opačném případě počítáme Hornerovo schéma pro dalšího dělitele absolutního členu a_n. Tak postupujeme, dokud „zbytkový" polynom není 2. řádu. Kořeny tohoto polynomu pak určíme (pokud jsou to reálná čísla) pomocí vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice.

Příklad 3.3.

Určete celočíselné kořeny polynomu $P(x) = x^5 + 9x^4 + 26x^3 + 20x^2 - 24x - 32$.

Řešení: Celočíselnými kořeny daného polynomu mohou být dělitelé čísla $a_n = -32$, tedy čísla: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$.

Pomocí Hornerova schématu zjišťujeme, zda některé z nich je skutečně kořenem. Postupujeme obyčejně od menších čísel k větším:

	1	9	26	20	-24	-32
1	1	10	36	56	32	0
1	1	11	47	103	$135 \neq 0$	

tedy číslo 1 je kořenem

Z tabulky vyplývá, že číslo 1 je jednoduchým kořenem a polynom lze rozložit podle druhé vlastnosti polynomů $x^5 + 9x^4 + 26x^3 + 20x^2 - 24x - 32 = (x-1).(x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 56x + 32)$.

Hledáme kořeny polynomu $x^4 + 10x^3 + 36x^2 + 56x + 32$, přičemž víme, že číslo 1 už to být nemůže. Dalšími možnými kořeny jsou zbývající celočíselní dělitelé čísla -32.

	1	10	36	56	32
-1	1	9	27	29	$3 \neq 0$
2	1	12	60	176	$384 \neq 0$
-2	1	8	20	16	0

Dalším kořenem je tedy číslo -2 a daný polynom lze psát ve tvaru součinu:

$x^5 + 9x^4 + 26x^3 + 20x^2 - 24x - 32 = (x-1).(x+2).(x^3 + 8x^2 + 20x + 16)$.

Dále hledáme kořeny polynomu $x^3 + 8x^2 + 20x + 16$. Možnými kořeny jsou opět celočíselní dělitelé čísla 16 : $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$. Čísla $\pm 1, 2$ už nemohou být kořeny, u čísla –2 je nutno prověřit, zda není kořenem vícenásobným:

	1	8	20	16
-2	1	6	8	0

Tedy číslo -2 je alespoň dvojnásobným kořenem.

Polynom $x^2 + 6x + 8$ již rozložíme pomocí kořenů kvadratické rovnice. Vzhledem k tomu, že jsou to čísla -2, -4, je rozklad $(x+2)(x+4)$. Tedy celkem můžeme daný polynom vyjádřit ve tvaru součinu kořenových činitelů:

$$P(x) = x^5 + 9x^4 + 26x^3 + 20x^2 - 24x - 32 = (x-1).(x+2)^3.(x+4).$$

Úlohy 3.1.

1.Určete součet, rozdíl a součin polynomů $P(x), Q(x)$:

a) $P(x) = 2x^4 - x^3 + 5x^2 - 6x + 1$, $Q(x) = x^2 - 3x + 4$,

b) $P(x) = -40x^3 + 118x^2 - 99x + 18$, $Q(x) = 2x^2 - x$.

2. Určete podíl polynomů $P(x), Q(x)$:

a) $P(x) = 2x^4 - x^3 + 5x^2 - 6x + 1$, $Q(x) = x^2 - 3x + 4$,

b) $P(x) = x^4 + x^2 - 2x + 3$, $Q(x) = x^2 - 2x + 1$,

c) $P(x) = 3x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 3$, $Q(x) = x - 1$,

d) $P(x) = x^5 + 4x^4 - 4x^2 - x$, $Q(x) = x^3 - x$,

e) $\left[(10x^4 - 19x^3 - 44x^2 + 35x - 6) : (2x^2 + 3x - 1)\right] : (x-3)$.

3. Užitím Hornerova schématu vypočítejte hodnotu polynomu $P(x)$ bodech $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$, $x_4 = 3$ a rozhodněte, které z nich jsou kořeny polynomu $P(x)$:

a) $P(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, c) $P(x) = x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$,

b) $P(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$, d) $P(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$.

4. Rozložte polynomy na součin kořenových činitelů pomocí Hornerova schématu:

a) $P(x)=x^5-2x^4-10x^3+20x^2+9x-18$, b) $Q(x)=x^4-14x^3+41x^2-4x-60$,

c) $S(x)=x^5-5x^4+9x^3-13x^2+14x-6$, d) $T(x)=x^6-6x^5+11x^4-2x^3-12x^2+8x$.

Výsledky úloh 3.1.

1. a) $P(x)+Q(x)=2x^4-x^3+6x^2-9x+5$, $P(x)-Q(x)=2x^4-x^3+4x^2-3x-3$,

$P(x)\cdot Q(x)=2x^6-7x^5+16x^4-25x^3+39x^2-27x+4$.

b) $P(x)+Q(x)=-40x^3+120x^2-100x+18$, $P(x)-Q(x)=-40x^3+116x^2-98x+18$,

$P(x)\cdot Q(x)=-80x^5+276x^4-316x^3+135x^2-18x$.

2. a) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=2x^2+5x+12+\dfrac{10x-47}{x^2-3x+4}$, $x\in\mathbf{R}$, b) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=x^2+2x+4+\dfrac{4x-1}{x^2-2x+1}$, $x\in\mathbf{R}/\{1\}$,

c) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=3x^3+7x+5+\dfrac{8}{x-1}$, $x\in\mathbf{R}/\{1\}$, d) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=x^2+4x+1$, $x\in\mathbf{R}/\{-1,0,1\}$,

e) $5x-2$, $x\in\mathbf{R}/\left\{\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4},3\right\}$.

3. a) $P(1)=8$, $P(-1)=0$, $P(-2)=5$, $P(3)=160$, $x_2=-1$ je kořen,

b) $P(1)=18$, $P(-1)=0$, $P(-2)=0$, $P(3)=220$, $x_2=-1$, $x_3=-2$ jsou kořeny,

c) $P(1)=18$, $P(-1)=0$, $P(-2)=-36$, $P(3)=484$, $x_2=-1$ je kořen,

d) $P(1)=0$, $P(-1)=0$, $P(-2)=0$, $P(3)=0$, čísla x_1,x_2,x_3,x_4 jsou kořeny.

4. a) $P(x)=(x-1).(x+1).(x-2).(x-3).(x+3)$,

b) $Q(x)=(x+1).(x-2).(x-3).(x-10)$,

c) $S(x)=(x-1)^2.(x-3).(x^2+2)$,

d) $T(x)=x.(x-1).(x+1).(x-2)^3$.

3.2 Racionální lomená funkce

Racionální lomená funkce

Definice 3.5.: Racionální lomenou funkcí nazýváme funkci $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, kde $P_m(x)$ a $Q_n(x)$ jsou polynomy, z nichž $Q_n(x)$ není nulový polynom.

Je-li $m\geq n$, mluvíme o neryze lomené funkci.

Je-li $m<n$, mluvíme o ryze lomené funkci.

Definičním oborem racionální lomené funkce je množina všech reálných čísel s výjimkou kořenů jmenovatele.

Z věty 3.3. o dělení polynomů bezprostředně vyplývá, že neryze lomenou racionální funkci je možné dělením vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Příklad 3.4.

Vyjádřete racionální lomenou funkci $R(x)=\dfrac{x^4+8x^2+16}{x^2+4x-5}$ jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Řešení: Racionální lomená funkce $R(x)=\dfrac{x^4+8x^2+16}{x^2+4x-5}$ je definována pokud je jmenovatel zlomku nenulový. Tedy pro $x\in \mathbf{R}/\{-5,1\}$.

Dělením polynomů $(x^4+8x^2+16):(x^2+4x-5)$ dostaneme polynom $P(x)=x^2-4x+29$ a funkci $G(x)=-136x+161$, jako zbytek po dělení.

Zadanou funkci můžeme tedy vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce ve tvaru $R(x)=x^2-4x+29+\dfrac{-136x+161}{x^2+4x-5}$.

Lineární lomená funkce

Funkce $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, kde $c\neq 0\wedge ad\neq bc$ se nazývá lineární lomená funkce. Má definiční obor $\mathbf{R}/\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ a obor hodnot $\mathbf{R}/\left\{\dfrac{a}{c}\right\}$. Jejím grafem je rovnoosá hyperbola. Asymptota rovnoběžná s osou x má rovnici $y=\dfrac{a}{c}$, asymptota rovnoběžná s osou y má rovnici $x=-\dfrac{d}{c}$. Pro kreslení grafu lineární lomené funkce je vhodné, vyjádřit si ji dělením ve tvaru $A+\dfrac{B}{cx+d}$.

Příklad 3.5.

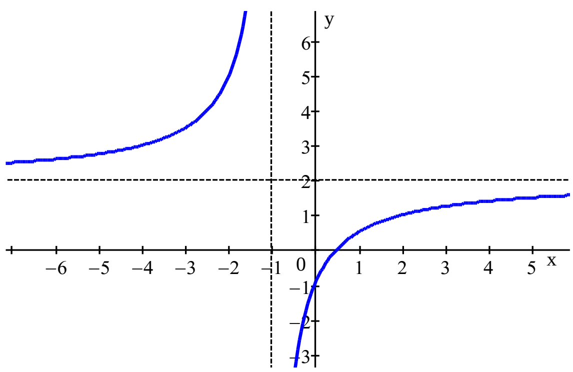
Sestrojte graf funkce $f:\ y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Řešení: Definiční obor funkce $D(f)=\mathbf{R}/\{-1\}$.

Dělením $(2x-1):(x+1)$ dostaneme $2-\dfrac{3}{x+1}$, tedy $f: y=\dfrac{-3}{x+1}+2$. Graf funkce f získáme posunutím grafu funkce $y=\dfrac{-3}{x}$ o 1 jednotku doleva po ose x a o 2 jednotky nahoru po ose y.

Průsečíky s osami: $x=0\Rightarrow y=-1,\ y=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Tedy $P_y=[0,-1], P_x=\left[\dfrac{1}{2},0\right]$.



!*! Rozklad racionální lomené funkce na součet parciálních zlomků

Ryze lomenou racionální funkci $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ lze vyjádřit jako součet jednoduchých, tzv. parciálních zlomků. Jejich tvar a počet je určen polynomem $Q_n(x)$ ve jmenovateli. Abychom zadané racionální lomené funkci mohli parciální zlomky přiřadit, musíme nejprve rozložit polynom $Q_n(x)$ na součin kořenových činitelů. Pak každému činiteli tvaru:

- $(x-x_i)$ odpovídá parciální zlomek tvaru $\dfrac{A}{x-x_i}$,
- $(x-x_j)^k$ odpovídá *k* parciálních zlomků tvaru $\dfrac{A_1}{(x-x_j)}+\dfrac{A_2}{(x-x_j)^2}+\ldots+\dfrac{A_k}{(x-x_j)^k}$,
- (ax^2+bx+c) s komplexními kořeny odpovídá parciální zlomek tvaru $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$.

Koeficienty $A, A_1, A_2, \ldots, A_k, M, N$ atd. určíme metodou neurčitých koeficientů. Jde o metodu, kterou budeme v budoucnu potřebovat i při řešení dalších problémů (integrování, řešení diferenciálních rovnic atd.).

Postup:
- rovnici, kde na levé straně je zadaná lomená funkce a na pravé straně součet odpovídajících parciálních zlomků, vynásobíme polynomem $Q_n(x)$,
- pravou stranu rovnice roznásobíme,
- porovnáním koeficientů polynomů na obou stranách rovnice dostaneme soustavu lineárních rovnic; řešením této soustavy jsou hledané koeficienty.

Příklad 3.6.

Rozložte racionální funkci: a) $R_1(x)=\dfrac{1}{x^3-2x^2+x}$, b) $R_2(x)=\dfrac{7x^2-4x+9}{x^3-x^2+2x-2}$ na součet parciálních zlomků.

Řešení: a) Polynom x^3-2x^2+x ve jmenovateli rozložíme vytknutím *x* na součin $x.(x-1)^2$. Racionální lomenou funkci můžeme tedy vyjádřit jako součet parciálních zlomků

$$R_1(x)=\frac{1}{x^3-2x^2+x}=\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}.$$

Koeficienty A, B a C určíme popsaným způsobem. Rovnici

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

násobíme polynomem x^3-2x^2+x (jmenovatel levé strany rovnice) a upravíme:

$$1=A.(x-1)^2+B.x.(x-1)+C.x$$

$$1=(A+B).x^2+(-2A-B+C).x+A$$

$$0.x^2+0.x+1=(A+B).x^2+(-2A-B+C).x+A$$

Polynomy na obou stranách rovnice jsou si rovny, pokud mají u stejných mocnin *x* stejné koeficienty. Porovnáním těchto koeficientů dostaneme 3 rovnice o 3 neznámých

$$\left.\begin{aligned} x^2 &: \quad A+B=0 \\ x^1 &: -2A-B+C=0 \\ x^0 &: \quad A=1 \end{aligned}\right\} \text{ s řešením } A=1,\ B=-1,\ C=1.$$

Rozklad zadané funkce na součet parciálních zlomků má tedy tvar

$$R_1(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

b) Polynom x^3-x^2+2x-2 rozložíme pomocí Hornerova schématu (viz. podkapitola 3.1.) na součin kořenových činitelů $(x-1)(x^2+2)$.

Racionální lomenou funkci můžeme tedy vyjádřit jako součet parciálních zlomků:

$$\frac{7x^2-4x+9}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}.$$

Rovnici násobíme polynomem $(x-1)(x^2+2)$ a upravíme :

$$7x^2-4x+9=A.(x^2+2)+(Bx+C)(x-1)$$

$$7x^2-4x+9=Ax^2+2A+Bx^2-Bx+Cx-C$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme 3 rovnice o 3 neznámých

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & A+B=0 \\ x^1: & -2A-B+C=0 \\ x^0: & A=1 \end{array}\right\} \text{ s řešením } A=4,\ B=3,\ C=-1.$$

Rozklad funkce na součet parciálních zlomků je $R_1(x)=\dfrac{4}{x-1}+\dfrac{3x-1}{x^2+2}$. !*!

Úlohy 3.2.

1. Určete definiční obor racionální lomené funkce:

a) $Q(x)=\dfrac{x+6}{x^2+x-6}$, b) $Q(x)=\dfrac{x^9-2^9}{x^3+8}$, c) $Q(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^4+x^3+x^2}$.

2. Rozhodněte, zda je racionální lomená funkce $T(x)$ ryzí nebo neryzí :

a) $T(x)=\dfrac{x^2-6}{x^2+x-5}$, c) $T(x)=\dfrac{2x^3-1}{x^2+x-5}$, b) $T(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^3+x-1}$, d) $T(x)=\dfrac{x+3}{x^2-2x-15}$.

3. Vyjádřete racionální lomenou funkci $R(x)$ ve tvaru součtu polynomu a ryze lomené racionální funkce: a) $R(x)=\dfrac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}$, c) $R(x)=\dfrac{x^3-8x^2+21x+10}{x-4}$, b) $R(x)=\dfrac{x^3-6x^2+5}{x-1}$, d) $R(x)=\dfrac{-16x^5+24x^4-25x^3+16x^2-8x+3}{4x^2-3x+2}$.

4. Sestrojte graf funkce f: a) $f: y=\dfrac{-1}{x+1}-2$, b) $f: y=\dfrac{2x-5}{3-x}$, c) $f: y=\dfrac{x-1}{x-2}$.

5. Vyjádřete racionální lomenou funkci jako součet parciálních zlomků : a) $R(x)=\dfrac{5x-4}{(x+1).(x-2)}$, b) $R(x)=\dfrac{x-6}{x^2.(x-2)}$, c) $R(x)=\dfrac{x}{x^3+x^2-x-1}$, d) $R(x)=\dfrac{1}{x^3-1}$, e) $R(x)=\dfrac{2x^3+8x+12}{x^4+4x^2}$, f) $R(x)=\dfrac{x+2}{x^3-2x^2+2x}$.

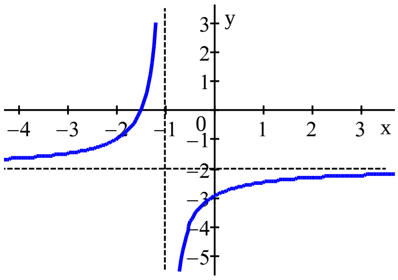
Výsledky úloh 3.2.

1. a) $D(Q)=\mathbf{R}/\{-3,2\}$, b) $D(Q)=\mathbf{R}/\{-2\}$, c) $D(Q)=\mathbf{R}/\{0\}$.

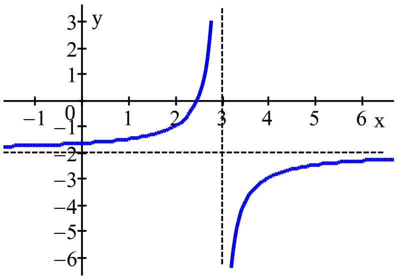
2. a) neryzí, b) ryzí, c) neryzí, d) ryzí.

3. a) $R(x)=5+\dfrac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}$, b) $R(x)=x^2-5x-5$, c) $R(x)=x^2-4x+5+\dfrac{30}{x-4}$, d) $R(x)=-4x^3+3x^2-2x+1-\dfrac{x-1}{4x^2-3x+2}$.

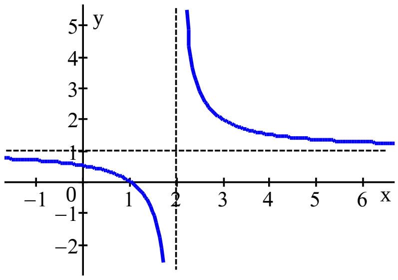
4. a)



b)



c)



5. a) $R(x)=\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2}{x-2}$, b) $R(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x-2}$, c) $R(x)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{(x+1)^2}$,

d) $R(x)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$, e) $R(x)=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{3}{x^2+4}$, f) $R(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{3-x}{x^2-2x+2}$.

Shrnutí kapitoly

Polynom, kořen polynomu a vlastnosti polynomu.

Důležitým typem elementárních funkcí jsou polynomy. Jsou tvořeny součtem mocninných funkcí a konstant. Číslo *c*, pro které je hodnota polynomu rovna nule, se nazývá kořen polynomu. Výraz (*x*-*c*) nazýváme kořenovým činitelem. Polynom stupně *n* má právě *n* kořenů.

Rozklad polynomu na součin kořenových činitelů s využitím Hornerova schématu.

Užitečnou pomůckou pro práci s polynomy je Hornerovo schéma. Je to algoritmus, pomocí kterého lze určovat funkční hodnoty polynomu v daném bodě a dělit polynom výrazem (*x*-*c*). Na základě vlastností polynomů je možné pomocí Hornerova schématu rozkládat polynomy na součin kořenových činitelů.

Racionální lomená funkce, funkce ryze a neryze lomená.

Racionální lomená funkce je podílem dvou polynomů. Pokud stupeň polynomu v čitateli je menší, než stupeň polynomu ve jmenovateli, mluvíme o ryze lomené funkci. V opačném případě jde o neryze lomenou funkci. Pomocí dělení polynomů je možné racionální lomenou funkci vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené funkce.

Rozklad racionální lomené funkce na součet parciálních zlomků.

Racionální lomenou funkci je možné vyjádřit jako součet parciálních zlomků. Jejich tvar a počet závisí na polynomu ve jmenovateli racionální lomené funkce. K určení konstant v čitatelích parciálních zlomků používáme metodu neurčitých koeficientů.

Klíčové pojmy

- polynom,
- kořen polynomu, kořenový činitel,
- rozklad polynomu na součin kořenových činitelů,
- Hornerovo schéma,
- racionální lomené funkce, ryze a neryze lomená,
- rozklad racionální lomená funkce na součet parciálních zlomků.

Samostatný test

A. Teoretická část

1. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá :

a) Polynom stupně 2 nazýváme lineárním polynomem.

b) Zbytek po dělení polynomu $P(x)$ polynomem $Q(x)$ je polynom, jehož stupeň je nižší než stupeň polynomu $Q(x)$.

c) Polynom stupně *n* má právě *n* reálných kořenů.

d) Každou lomenou racionální funkci lze rozložit na parciální zlomky.

e) Grafem lineární lomené funkce je rovnoosá hyperbola.

2. Uveďte příklad ryze lomené racionální funkce $R(x)$, pro kterou platí :

a) $R(x)$ je definována pro všechna $x \in \mathbf{R}$,

b) $R(x)$ nabývá nulové hodnoty v bodě $x = 1$,

c) $R(x)$ lze rozložit na součet dvou parciálních zlomků.

3. Uveďte příklad polynomu stupně alespoň 3, který je :

a) sudou funkcí,

b) lichou funkcí.

B. Praktická část

1. Jsou dány polynomy $P(x) = x^5 + 3x^4 - 7x + 4$ a $Q(x) = x^3 + x + 1$.

Vypočítejte: a) $P(x) + Q(x)$, b) $P(x) - Q(x)$, c) $P(x).Q(x)$, d) $P(x) : Q(x)$.

2. Užitím Hornerova schématu určete hodnotu polynomu $P(x) = x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 44x - 48$ v bodě 3. Dále zjistěte, zda číslo 2 je kořenem tohoto polynomu a jaká je jeho násobnost.

3. Rozložte polynomy na součin kořenových činitelů a určete všechny jejich reálné kořeny :

a) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x$,

b) $Q(x) = x^5 - 10x^4 + 34x^3 - 36x^2 - 27x + 54$,

c) $S(x) = x^5 + 5x^4 - 18x^3 - 23x^2 + 29x - 42$.

4. Vyjádřete racionální lomenou funkci jakou součet polynomu a ryze lomené racionální funkce a určete její definiční obor: a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2}{x - 1}$, b) $g(x) = \dfrac{2x^4 + 3x + 1}{x^2 - 3}$.

5. Je dána funkce $f:\ y = \dfrac{6x + 4}{3x - 1}$.

a) Nakreslete graf funkce $f(x)$.

b) Určete definiční obor $D(f)$ a obor hodnot $H(f)$.

c) Určete vlastnosti funkce $f(x)$: monotónnost, periodičnost, ohraničenost, lichost a sudost.

6. Vyjádřete racionální lomenou funkci jakou součet parciálních zlomků:

a) $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)(2x+1)}$, b) $g(x) = \dfrac{1}{x^3 - x^2}$, c) $h(x) = \dfrac{4 - x}{x^3 - 2x^2 + 2x}$.